



Anti-alias-filter

Tittel: Anti-alias-filter

Forfattere: Andreas Lindeman

Versjon: 3.1

Dato: 06.12.2025

Innhold

1	Problembeskrivelse	1
2	Prinsipiell løsning	2
2.1	Kravspesifikasjon	2
2.2	Valg av filtertype	2
2.3	Valg av f_c og orden	3
2.4	Kretstopologi	4
2.5	Poler, Q-faktorer og kretsparametre	4
2.6	Kretsverdier	4
2.7	Numeriske verdier	5
3	Realisering og test	5
3.1	Komponentvalg	6
3.2	Målinger og avviksanalyse	6
4	Konklusjon	9
5	Takk	9
6	Kilder	10

1 Problembeskrivelse

Vi vil ta for oss design av et anti-alias-filter som vist i figur 1:



Figur 1: Blokk figur av systemet

Anti-alias-filteret fungerer som et mellomledd mellom et analogt signal (V_{inn}) og inngangen på en ADC (V_{ut}). For å unngå anti-alias feil må vi ifølge punktprøvingsteoremet båndbegrense signalet til halvparten av punktprøvingsfrekvensen vår f_s . Vi kan definere frekvensene vi vil dempe som alle frekvenser over $\frac{f_s}{2} = f_{dempet}$. En fullstendig demping er verken mulig eller nødvendig. Vi trenger bare å dempe signalet tilstrekkelig for applikasjonen. I tillegg ønsker vi at frekvenskomponentene under f_{dempet} skal påvirkes minst mulig. Vi setter opp følgende spesifikasjoner:

- Filteret skal ha en demping på minst 10 dB ved frekvensen f_{dempet} .
- Knekkfrekvensen til filteret skal oppfylle $f_c > 0.75f_{dempet}$

Der hvor knekkfrekvensen til systemet f_c er definert som punktet der amplituderresponsen har sunket med 3 dB fra sitt høyeste nivå.

2 Prinsipiell løsning

2.1 Kravspesifikasjon

Følgende parametere og krav er gitt for systemet:

- Prøvefrekvens: $f_s = 3000$ Hz.
- Krav: Dempning må være minst 10 dB ved $f_{dempet} = f_s/2 = 1500$ Hz.
- Knekkfrekvens f_c skal oppfylle $f_c > 0.75 \cdot f_{dempet} = 0.75 \cdot 1500 = 1125$ Hz.
- Knekkfrekvens er definert som -3 dB-punktet.

2.2 Valg av filtertype

Vi velger et Butterworth-lavpassfilter for å oppnå maksimal flatheit i passbåndet og en monotont avtagende respons i stoppbåndet. For et Butterworth-filter av orden n er amplitudere-

sponsen $|H(j\omega)|$ (normalisert til DC-gevinst = 1) gitt ved:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}} \quad (1)$$

Her representerer ω signalets vinkelfrekvens, mens ω_c er filterets knekkfrekvens (begge målt i rad/s).

La A være den lineære amplitudedefaktoren som tilsvarer en dempning på A_{dB} (målt i desibel):

$$A = 10^{(-A_{\text{dB}}/20)}.$$

Når vi krever at responsen ved frekvensen $\omega_1 = 2\pi f_{\text{dempet}}$ skal være lik A , altså $|H(j\omega_1)| = A$, får vi likningen:

$$A^{-2} - 1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^{2n}.$$

Ved å løse denne med hensyn på filterets orden n , får vi:

$$n = \frac{1}{2} \frac{\ln(A^{-2} - 1)}{\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\ln(A^{-2} - 1)}{\ln\left(\frac{f_{\text{dempet}}}{f_c}\right)}. \quad (2)$$

2.3 Valg av f_c og orden

Vi ønsker lavest mulig orden samtidig som kravet $f_c > 1125$ Hz oppfylles. Kravet til dempning ved f_{dempet} er $A_{\text{dB}} = 10$ dB, som gir den lineære faktoren:

$$A = 10^{-10/20} \approx 0.3162.$$

Siden komponentene ikke er ideelle og vi må forholde oss til standardverdier, legger vi inn en sikkerhetsmargin i beregningene. Vi antar at knekkfrekvensen kan avvike med opptil 5% og dimensjonerer derfor konservativt.

Vi reduserer f_{dempet} med 5% og øker f_c med 5% for å finne de effektive dimensjoneringsfrekvensene $f_{\text{dempet}}^{\text{eff}}$ og f_c^{eff} . Forholdet mellom dem blir:

$$\frac{f_{\text{dempet}}}{f_c} \approx \frac{f_{\text{dempet}}^{\text{eff}}}{f_c^{\text{eff}}} = \frac{1.5 \cdot 0.95}{1.125 \cdot 1.05} \approx 1.2063.$$

Vi kan dermed beregne et konservativt estimat for filterets orden ved å bruke ligning (2):

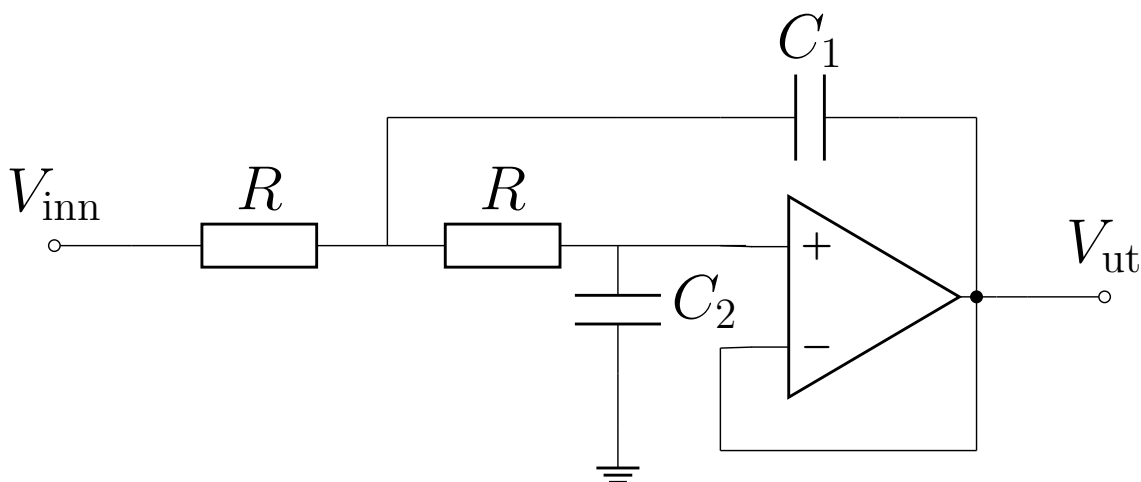
$$n = \frac{1}{2} \frac{\ln(A^{-2} - 1)}{\ln\left(\frac{f_{\text{dempet}}^{\text{eff}}}{f_c^{\text{eff}}}\right)} = \frac{\ln(0.3162^{-2} - 1)}{2 \cdot \ln(1.2063)} \approx 5.86 \approx 6.$$

Dette tilsier at vi bør benytte et 6. ordens Butterworth-filter.

2.4 Kretstopologi

Vi implementerer et 6. ordens Butterworth-filter ved å kaskadekoble tre 2. ordens Sallen-Key lavpass-seksjoner (moduler). Hver modul har samme egenfrekvens $\omega_0 = 2\pi f_c^{\text{eff}}$, men ulik Q-faktor som bestemt av Butterworth-polene.

En prinsipiell skisse av en enkelt Sallen-Key-modul er vist i Figur 2. I figuren er V_{inn} innangsspenningen og V_{ut} utgangsspenningen, mens R , C_1 og C_2 er de passive komponentene som bestemmer modulens frekvensrespons.



Figur 2: Prinsipiell skisse av en Sallen-Key lavpass-modul.

2.5 Poler, Q-faktorer og kretsparametre

For et Butterworth-filter av orden n ligger de normaliserte polene på enhetssirkelen i venstre halvplan. Etersom $n = 6$ (partall), kan vi beregne de reelle dempningsfaktorene ζ_i for hvert av de tre konjugerte polparene ved hjelp av følgende formel:

$$\zeta_i = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + (i-1)\frac{\pi}{n}\right), \quad \text{for } i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Dette gir oss verdiene for hver av de tre Sallen-Key-modulene:

$$\zeta_1 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.9659, \quad \zeta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) \approx 0.7071, \quad \zeta_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) \approx 0.2588.$$

2.6 Kretsverdier

For å finne komponentverdiene betrakter vi en Sallen-Key-modul om gangen. Vi velger en standardverdi for motstandene, $R = 10 \text{ k}\Omega$, for å forenkle beregningene. For en Sallen-Key-

modul definerer vi tidskonstantene τ_1 og τ_2 basert på vinkelfrekvensen ω_0 og dempningsfaktoren ζ :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \zeta}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2 \tau_1}. \quad (4)$$

Sammenhengen mellom tidskonstant, motstand og kapasitans er gitt ved $\tau = RC$. Ved å løse for kapasitansen C , får vi:

$$C = \frac{\tau}{R}. \quad (5)$$

Dette gir oss følgende uttrykk for kondensatorene i hver modul:

$$C_1 = \frac{\tau_1}{R}, \quad C_2 = \frac{\tau_2}{R}. \quad (6)$$

2.7 Numeriske verdier

Vi benytter de beregnede dempningsfaktorene ζ og den effektive knekkfrekvensen:

$$f_c^{\text{eff}} = 1181.25 \text{ Hz} \implies \omega_0 = 2\pi f_c^{\text{eff}} \approx 7422.01 \text{ rad/s.}$$

Tabell 1 viser de beregnede verdiene for Q -faktor, tidskonstanter og kondensatorer for hver modul (med $R = 10 \text{ k}\Omega$).

Tabell 1: Parametre og kondensatorverdier for hver Sallen-Key modul.

Modul	ζ	$Q = \frac{1}{2\zeta}$	τ_1 [s]	τ_2 [s]	C_1	C_2
1	0.9659	0.5178	$1.395 \cdot 10^{-4}$	$1.301 \cdot 10^{-4}$	13.95 nF	13.01 nF
2	0.7071	0.7071	$1.905 \cdot 10^{-4}$	$9.527 \cdot 10^{-5}$	19.05 nF	9.53 nF
3	0.2588	1.9320	$5.206 \cdot 10^{-4}$	$3.487 \cdot 10^{-5}$	52.06 nF	3.49 nF

Siden de beregnede kapasitansene C_{tot} sjelden samsvarer med standardverdier, må de realiseres ved å kombinere flere kondensatorer. For parallellkobling gjelder:

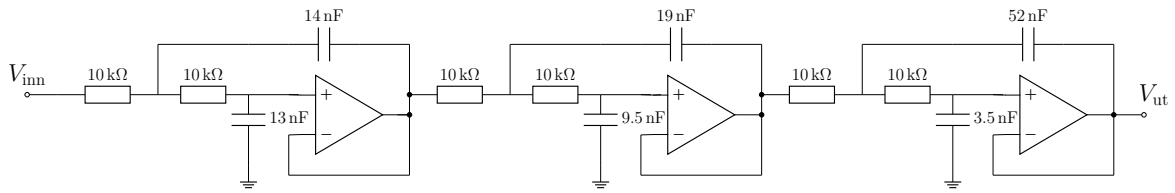
$$C_{\text{tot}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (7)$$

For seriekobling gjelder:

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (8)$$

3 Realisering og test

Etter å ha fastsatt komponentverdier og kretsdesign, kan vi realisere filteret fysisk. Figur 3 viser det fullstendige skjemaet for det realiserte 6. ordens filteret, med inngangsspenning V_{inn} og utgangsspenning V_{ut} . Motstandsverdiene er standardiserte, mens kondensatorverdiene C er realisert ved å kombinere standardkomponenter.



Figur 3: Realisert krets med komponentverdier.

3.1 Komponentvalg

For å oppnå de beregnede kapasitansverdiene må vi kombinere flere kondensatorer ved hjelp av parallellkobling. De resulterende verdiene bestemmes ved hjelp av formelen for parallellkobling, gitt i ligning (7). Vi konstruerer de nødvendige verdiene C_{ij} (hvor i er modulnummer og j er komponentnummer) basert på tilgjengelige komponenter som følger:

$$C_{11} = 14 \text{ nF} = 10 \text{ nF} \parallel 1.5 \text{ nF} \parallel 1.5 \text{ nF} \parallel 1 \text{ nF}$$

$$C_{12} = 13 \text{ nF} = 10 \text{ nF} \parallel 1.5 \text{ nF} \parallel 1.5 \text{ nF}$$

$$C_{21} = 19 \text{ nF} = 10 \text{ nF} \parallel 6.8 \text{ nF} \parallel 2.2 \text{ nF}$$

$$C_{22} = 9.5 \text{ nF} = 4.7 \text{ nF} \parallel 3.3 \text{ nF} \parallel 1.5 \text{ nF}$$

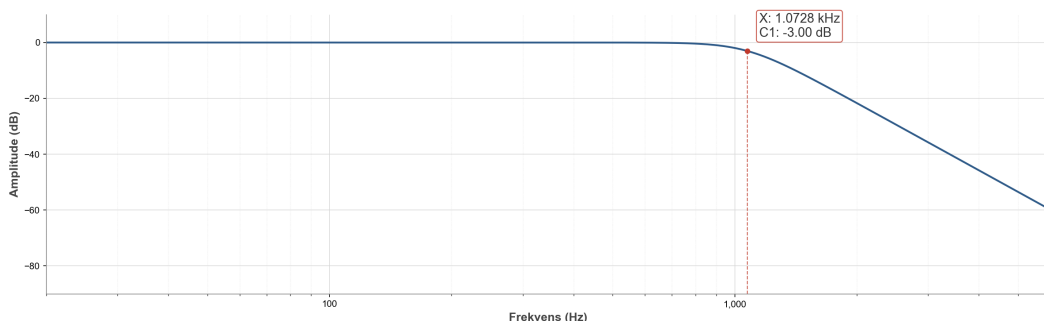
$$C_{31} = 52 \text{ nF} = 15 \text{ nF} \parallel 15 \text{ nF} \parallel 22 \text{ nF}$$

$$C_{32} = 3.5 \text{ nF} = 1 \text{ nF} \parallel 1 \text{ nF} \parallel 1.5 \text{ nF}$$

Ved å konstruere alle kapasitansene utelukkende ved hjelp av parallellkoblinger, forenkler vi den fysiske oppkoblingen på koblingsbrettet og sparer plass.

3.2 Målinger og avviksanalyse

Etter at kretsen ble koblet opp, ble systemets frekvensrespons målt. Figur 4 viser den målte amplituderresponsen.

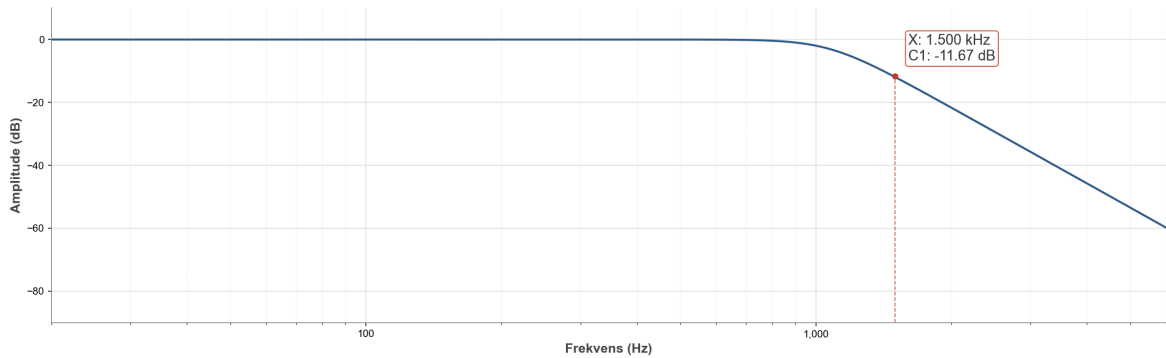


Figur 4: Målt amplituderrespons for det realiserte filteret.

Målingene avdekker et avvik: knekkfrekvensen ligger på ca. 1.07 kHz, noe som er lavere enn den

beregnete effektive knekkfrekvensen $f_c^{\text{eff}} \approx 1.18 \text{ kHz}$ og under minimumskravet på 1.125 kHz .

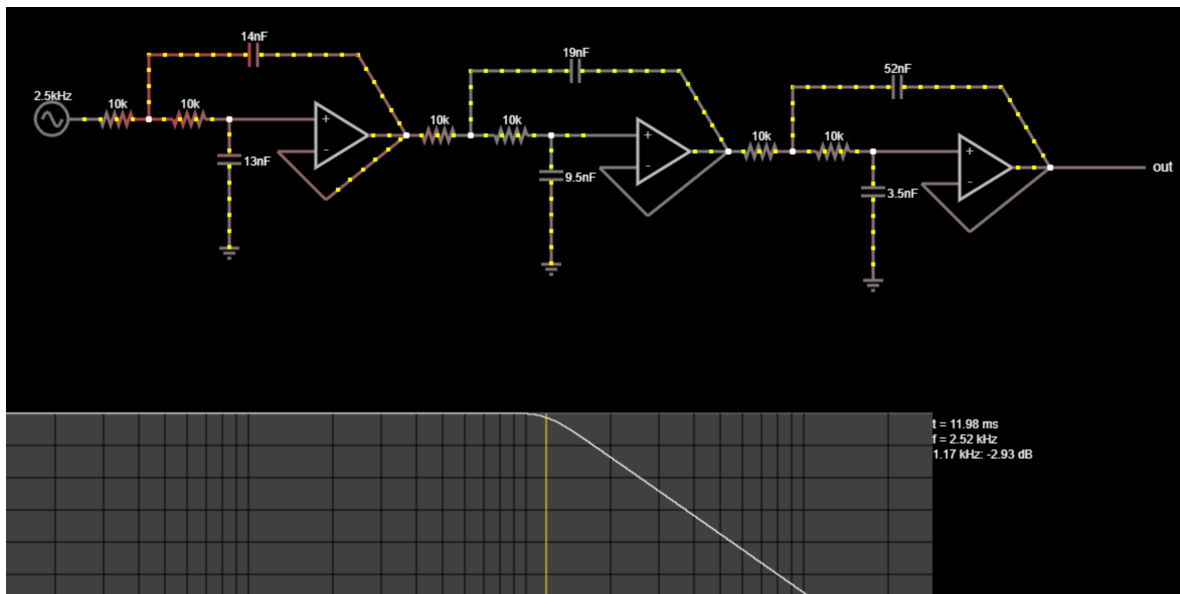
Når det gjelder kravet ved f_{dempet} er resultatene imidlertid tilfredsstillende. Vi ser i Figur 5 at dempningen ved 1500 Hz er oppnådd med god margin.



Figur 5: Detaljert måling rundt $f_{\text{dempet}} = 1.5 \text{ kHz}$.

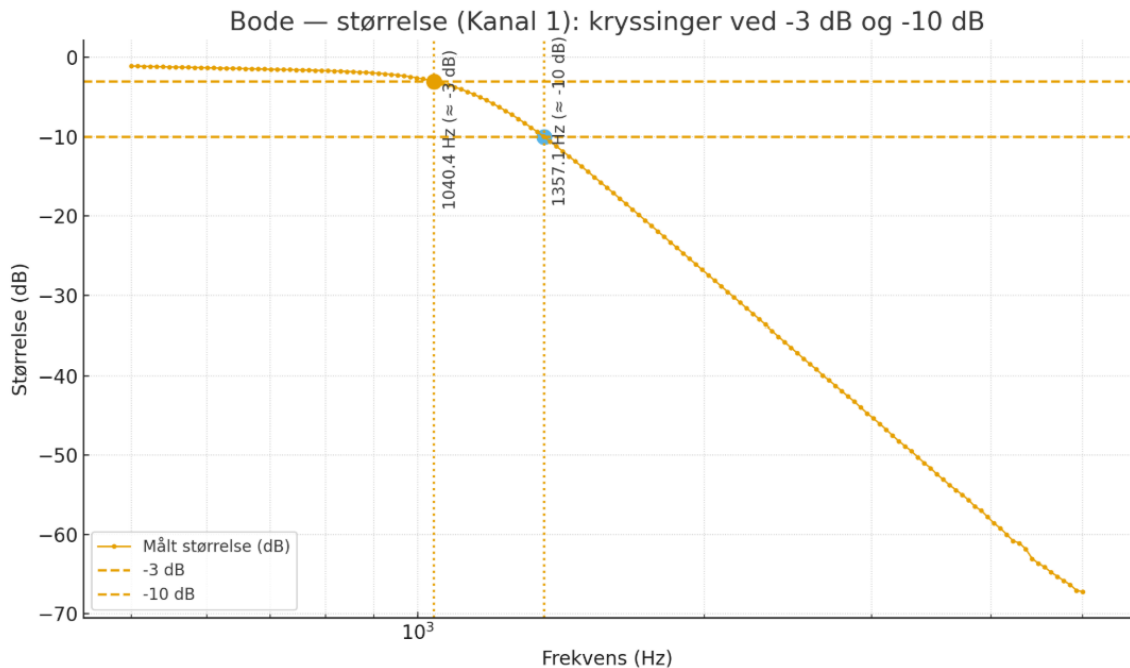
En målt dempning på 11.67 dB er godt over kravet på 10 dB . Det observerte avviket tyder på at hele filterkarakteristikken er forskjøvet mot lavere frekvenser.

For å isolere feilkilden ble kretsen simulert i programvaren Falstad, med forutsetning om ideelle komponenter.



Figur 6: Simulering av kretsen i Falstad med ideelle komponenter.

Simuleringen (Figur 6) bekrefter at med ideelle komponenter ligger knekkfrekvensen nøyaktig der beregningene tilsier. Dette indikerer at avviket oppstår i den fysiske realiseringen. For å utelukke koblingsfeil ble en ny krets (Krets 2) bygget opp fra bunnen av med nye komponenter. Målingene for denne kretsen er vist i Figur 7.

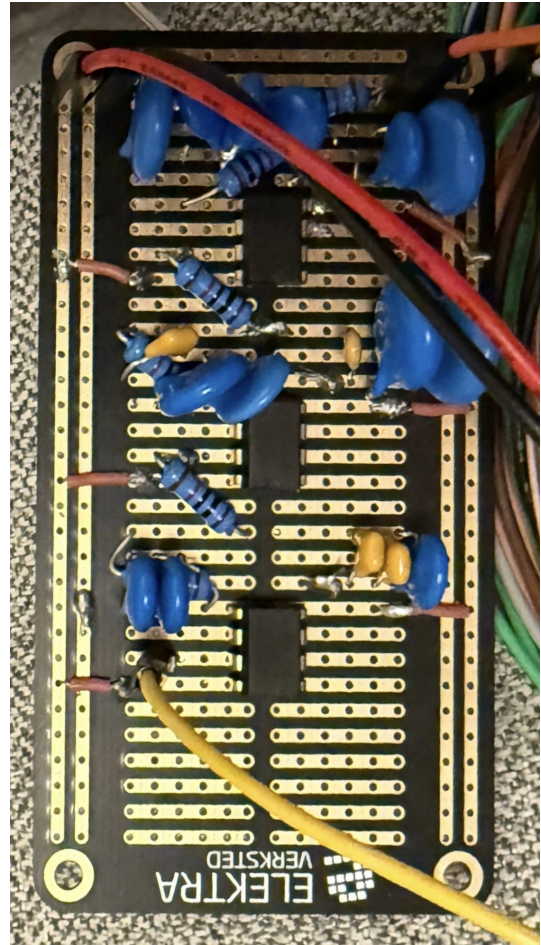
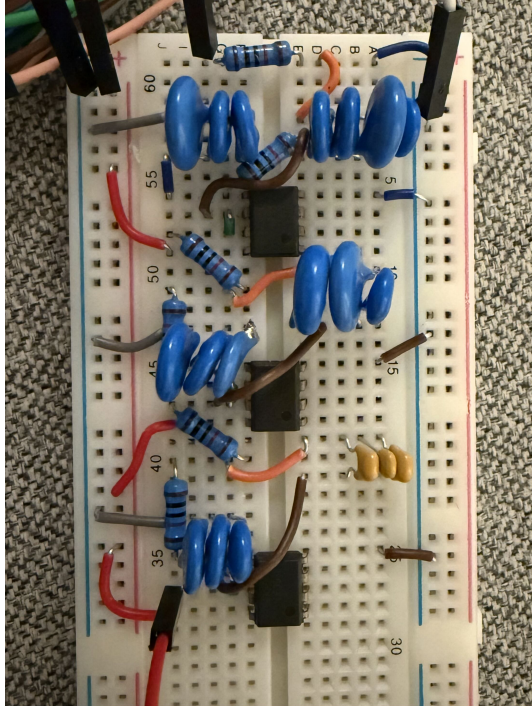


Figur 7: Måling av den andre realiserte kretsen (Krets 2).

Resultatene for Krets 2 viser samme type avvik som den første kretsen. Dette tyder på systematiske feilkilder knyttet til de fysiske egenskapene ved realiseringen. Det er spesielt tre faktorer som bidrar til at den reelle knekkfrekvensen blir lavere enn den teoretiske:

- **Komponenttoleranse:** Til tross for omhyggelig sammensetting av kondensatorer, har hver enkelt komponent en toleranse (vanligvis $\pm 5\%$). Selv små, akkumulerte avvik i motstandsverdier (R) og kapasitansverdier (C) vil føre til en endring i tidskonstantene τ_1 og τ_2 , og dermed forskyve knekkfrekvensen f_c .
- **Strøkapasitanser, induktanser og monstader:** På et koblingsbrett og selv i en loddet prototype vil koblingsspor og komponentben bidra med små strøkapasitanser og strøinduktanser som legger seg parallelt med de tilsiktede R og C elementene. Dette har en større innvirkning ved høyere frekvenser og bidrar til at den effektive frekvensresponsen endres.
- **Ikke-ideell operasjonsforsterker:** Den benyttede operasjonsforsterkeren er ikke ideell. Den har en endelig inngangsimpedans, utgangsimpedans og et begrenset produkt av forsterkning og båndbredde. Faseforskyvning i opampen ved høyere frekvenser kan også påvirke filterets totale respons og bidra til avviket fra den ideelle modellen.

Figur 8 viser bilder av de to ferdig oppkoblede kretsene.



Figur 8: Bilde av de to fysisk realiserte kretsene på koblingsbrett.

4 Konklusjon

Kretsen fungerer i henhold til krav til demping, men viser en systematisk forskyvning i knekkfrekvens mot lavere frekvenser i realisering. Dette skyldes trolig reelle komponent-egenskaper. Ved å måle og bruke faktiske komponentverdier, forbedre layout og eventuelt velge komponenter med strammere toleranser, kan knekkfrekvensen trolig bringes innenfor designkravet. Etersom vi nå har erfart en sterkere demping av lavere frekvenser enn forventet, kan en tenkt forbedring være å flytte knekkfrekvensen mot høyere frekvenser når komponentverdiene blir valgt for å motvirke denne forskyvningen.

5 Takk

Jeg vil gjerne takke Nicolai Lindeman for hjelp til lodding og henting av enkelte komponenter.

6 Kilder

NTNU, TTT4265 Elektronisk systemdesign og -analyse II Designprosjekt 7 2025 Anti-alias-filter, 2025